

E.T.S. DE INGENIEROS DE CAMINOS CANALES Y PUERTOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2^º CURSO Y ADAPTACIÓN 2009/2010

PRÁCTICA 1

1.1

- (i) Se consideran los siguientes números complejos:

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^{12}}{1 - \sqrt{3}i} \qquad \frac{(1 + i)^5}{1 + i^5} \qquad (\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n, n \in \mathbb{N}$$

Obtener sus módulos y sus argumentos, así como de los conjugados de dichos números y expresarlos en la forma $a + bi$. ¿ Son mayores o menores que 0 ?

- (ii) Hallar $\sqrt[3]{2 + 2i}$, (raíz cúbica de $2 + 2i$). ¿ Es única ?
- (iii) Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ consideramos: el conjunto A formado por todas las raíces cuartas de z^2 y el conjunto B de los cuadrados de cada una de las raíces cuartas de z . Justificar razonadamente si A es igual a B .
- (iv) Resolver en $\mathbb{C}$ las ecuaciones: $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ y $(2z^2 - 5z + 10)^2 - (z^2 - z + 5)^2 = 0$.
- (v) Hallar los números complejos cuyo cubo sea igual al cuadrado de su conjugado y hallar la ecuación cuyas raíces sean la soluciones del problema.

1.2

Describir geométricamente cada uno de los siguientes conjuntos:

- | | |
|---|---|
| a) $\{z \in \mathbb{C}; z - 1 - i = 1\}$ | b) $\{z \in \mathbb{C}; z - 1 + i \geq z - 1 - i \}$ |
| c) $\{z \in \mathbb{C}; z + i \neq z - i \}$ | d) $\{z \in \mathbb{C}; z + 2 > 1 + z - 2 \}$ |
| e) $\{z \in \mathbb{C}; \frac{ z-a }{ z-b } = k; a, b \in \mathbb{C} \text{ distintos}, k \in \mathbb{R}^+\}$ | f) $\{z \in \mathbb{C}; z < \cos(\arg z)\}$ |
| g) $\{z = z e^{i\theta} \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{3}{4}\pi\}$ | h) $\{z \in \mathbb{C}; \Re z < 1 \text{ ó } \Im(z - 1) \neq 0\}$ |
| i) $\{z \in \mathbb{C}; z - 1 < 1 \text{ y } z = z - 2 \}$ | j) $\{z \in \mathbb{C}; z - 2 > 3 \text{ y } z > 2\}$ |
| k) $\{z \in \mathbb{C}; \Im[\frac{z+i}{2i}] < 0\}$ | l) $\{z \in \mathbb{C}; z ^2 > z + \bar{z}\}$ |

1.3

- (i) Obtener las partes real e imaginaria de la funciones complejas de variable compleja $z = x + iy$, siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) & \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ \operatorname{senh} z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) & \cosh z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \end{aligned}$$

- (ii) Probar que:

$$\begin{aligned} \cos^5(t) &= \frac{1}{24}(\cos 5t + 5 \cos 3t + 10 \cos t) \\ \operatorname{sen}^5(t) &= \frac{1}{24}(\operatorname{sen} 5t - 5 \operatorname{sen} 3t + 10 \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

1.4

- (i) Obtener, si existen, los siguientes límites: ($z \in \mathbb{C}$)

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{|z|^2}{z}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{\bar{z}}{z}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow -1 \\ |z| \neq 1}} \frac{z+1}{|z|-1}$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{\Re z \cdot \Im z}{|z|}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z^2 \neq \bar{z}^2}} \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z^2 - \bar{z}^2}, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z + \bar{z} \neq 0}} \frac{(z - \bar{z})^2}{z + \bar{z}}$$

En caso de no existencia obtener los límites direccionales.

- (ii) Sea $f(z) = \overline{p(z)}$, siendo $p(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^k$ un polinomio de grado N y coeficientes complejos.

Calcular, si existe, la derivada $f'(0)$.

- (iii) Sea $f = u + iv$ una función compleja definida en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Suponemos que existen $u_x(x_0, y_0)$, $v_x(x_0, y_0)$, siendo $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Justificar, de forma razonada, si existe necesariamente $f'(z_0)$. De existir, ¿cómo se expresaría en función de $u_x(x_0, y_0)$ y $v_x(x_0, y_0)$?

1.5

Estudiar la holomorfía o derivabilidad de las siguientes funciones complejas y calcular, para cada una de ellas, el valor de la derivada en los puntos $z = x + iy$ donde exista.

$$f(z) = (z-1)(\bar{z}-i)^2, \quad f(z) = (y^2x - \frac{2}{3}y^3) + i(x^2y - \frac{2}{3}x^3), \quad f(z) = \overline{\sin z}$$

$$f(z) = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z^2 - \bar{z}^2}, \quad f(z) = \frac{1}{\cos z + 2}, \quad f(z) = (z^2 - 2)e^{-z}$$

$$f(z) = \sinh(\bar{z}), \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + (1-3i)}, \quad f(z) = \cos\left(\frac{1}{i + e^{2z+3}}\right)$$

1.6

- (i) Se considera $f(z)$ función holomorfa en $\mathbb{C}$. ¿Qué puede asegurarse respecto de la existencia de derivada de las funciones siguientes?

$$f_1(z) = \overline{f(z)}; \quad f_2(z) = f(\bar{z}); \quad f_3(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

- (ii) Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{C}$ para los cuales la transformación $f(z) = \frac{z}{1+\alpha z^2}$ es holomorfa en el disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$
- (iii) Hallar la parte real y la parte imaginaria de los números: $(2-2i)^{i-1}$ y $(1+i)^i - (1-i)^{-i}$.
- (iv) Dada la función $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, calcular, si existe, su derivada enésima particularizada en el punto $z = 0$, sabiendo que α, β, γ y δ son números complejos arbitrarios ($\delta \neq 0$).¹

¹Resolver nuevamente este apartado, después de la práctica 2.